

文章编号: 1000-7598(2009)02-0323-05

# 地基沉降修正系数的 Bayes 概率推断

王永和, 李珍玉, 胡 萍, 杨果林

(中南大学 土木建筑工程学院, 长沙 410075)

**摘 要:** 通过分析常规方法在沉降修正系数的选取中具有的定值性和随意性, 引入建立在过去信息和现在样本信息之上的 Bayes 理论, 结合某客运专线红黏土路基工程, 提出用后验分布得到修正系数的取值范围。实例研究表明, 用以往经验综合样本信息, 估计修正系数的先验概率在某一区间上服从均匀分布。由现场载荷试验实测沉降量与理论计算沉降量分析所得的修正系数, 将现场量测的沉降变形信息与先验信息结合起来, 利用 Bayes 统计理论, 由小样本试验数据推算得到修正系数的后验概率服从正态分布。对后验分布所得参数进行区间估计, 得到该区域红黏土地基沉降修正系数的取值优化区间为 [1.0, 1.7], 分析了不同荷载作用条件下沉降修正系数的概率分布模型。

**关 键 词:** 沉降; 修正系数; 小样本; Bayes 理论; 概率分布

**中图分类号:** TU 470

**文献标识码:** A

## Bayesian statistics conduct on modified coefficients for foundation settlement calculation

WANG Yong-he, LI Zhen-yu, HU Ping, YANG Guo-lin

(School of Civil and Architectural Engineering, Central South University, Changsha 410075, China)

**Abstract:** Through the analysis of the definite and randomness in choosing the settlement modified coefficients by the traditional calculation methods for foundation deformation, the Bayesian statistics was brought forward which was built on the old information and the sample information. The posterior distribution of settlement modified coefficients had been obtained. Conjoining the road bed engineering structure of one passenger dedicated railway, the value range of settlement modified coefficients had been obtained through its posterior distribution. The case study shows the priori probabilities of modified coefficients were estimated to obey uniform distribution in the certain range based on the old information. The settlement modified coefficients had been obtained through analyzing the observed deformation and calculation deformation. Combining the deformation information from the field tests with the prior information, the posterior probabilities of modified coefficients were calculated to obey normal distribution by Bayesian statistics. In addition, the parameters were investigated by estimation of Bayesian confidence interval. According to this red clay, interval estimation of modified coefficients was optimized at [1.0, 1.7]. And probability distribution models of modified coefficients had been obtained under different load conditions.

**Key words:** settlement; modified coefficients; small sample; Bayesian theory; probability distribution

## 1 引 言

对某一参数进行统计分析, 需要预先确定样本量的大小。在系统误差确定的条件下, 抽样调查的准确性取决于抽样误差, 而抽样误差的大小又与样本容量有直接的关系, 即样本容量越大, 抽样误差

就越小<sup>[1-3]</sup>。当然, 这并不能说在抽样调查中样本容量越大就越好, 因为样本容量越大, 调查的费用就越高。在岩土工程中, 常常遇到不能大量取样的情况, 尤其是现场载荷试验。如果使用建立在大量的试验样本数据之上的传统统计方法, 那么对于小样本情况下, 所得的结论可靠性就不高。研究表

收稿日期: 2007-10-27

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No.50678177); 国家自然科学基金资助项目 (No.50778180)。

第一作者简介: 王永和, 男, 1945 年生, 教授, 博士生导师, 主要从事岩土工程地基变形及处理方面的研究。Email: yhwang45@163.com

明<sup>[4-6]</sup>, Bayes 方法可以用于小样本试验分析, 在样本难于取得时特别有用, 它可以发现数据之间的因果关系, 适合于处理不完整数据。也就是说, 建立在过去信息和现在的样本信息之上的 Bayes 统计, 对小样本系统的可靠性推理方法是可行的, 并且得到了广泛的认可。

由于各种原因, 建筑地基设计规范中推荐的方法<sup>[7]</sup>, 仍是岩土工程设计计算地基沉降时的主要方法, 然而它最大的缺点就是沉降修正系数的不确定性。由于试验方法的差异、土性指标的各向异性、试验条件与地基土实际状态间的差异、修正理论的不完善, 使得同一地层和区域的沉降修正系数不能完全依靠规范取得确定值, 而应该是根据土性指标变化的一种分布。本文基于以往对沉降修正系数的认识, 结合某客运专线的现场载荷试验和大量的室内土工试验, 运用 Bayes 理论对其进行了重新的推断和估计。

## 2 Bayes 原理

Bayes 理论在统计过程中引入了先验分布和后验分布<sup>[8-10]</sup>。设总体  $X$  的概率密度函数为  $p(x|\theta)$ ,  $\theta$  是参数空间  $\Theta = \{\theta\}$  中的一个未知参数, 通过  $X$  的一组样本观测值去推断  $\theta$  的分布。先验分布就是在获得观测值之前, 从已有的信息和经验知识中得到  $\theta$  在  $\Theta$  中的一个概率分布  $\pi(\theta)$ 。假定随机变量  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是总体  $X$  的一个样本, 若给定  $X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n$ , 各随机变量  $x_1, x_2, \dots, x_n$  之间相互独立, 则样本联合密度函数为

$$p(x|\theta) = \prod_{i=1}^n p(x_i|\theta) \quad (1)$$

式中:  $\theta$  为先验分布  $\pi(\theta)$  中的样本参数。

考虑先验分布  $\pi(\theta)$ , 则样本  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  和参数  $\theta$  的联合分布为

$$h(x, \theta) = p(x|\theta)\pi(\theta) \quad (2)$$

根据样本观测值, 联合分布分解为

$$h(x, \theta) = \pi(\theta|x)m(x) \quad (3)$$

式中:  $m(x)$  为  $x$  的边缘密度函数。

$$m(x) = \int_{\Theta} h(x, \theta) d\theta = \int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta) d\theta \quad (4)$$

$m(x)$  中不含  $\theta$  的相关信息。条件分布  $\pi(\theta|x)$  的计算式如下:

$$\pi(\theta|x) = \frac{h(x, \theta)}{m(x)} = \frac{p(x|\theta)\pi(\theta)}{\int_{\Theta} p(x|\theta)\pi(\theta) d\theta} \quad (5)$$

这就是 Bayes 公式的密度函数形式。这个在样本  $x$  给定下,  $\theta$  的条件分布即被称为  $\theta$  的后验分布。它是集中了总体、样本和先验等 3 种信息中有关  $\theta$  的一切信息, 而又是排除一切与  $\theta$  无关的信息之后所得到的结果。故基于后验分布  $\pi(\theta|x)$  对  $\theta$  进行的统计推断是更为有效的, 也是最合理的。

## 3 参数的 Bayes 推断

### 3.1 沉降修正系数

地基土在荷载作用下产生沉降变形, 取原状土进行室内试验所得土性参数, 如孔隙比、压缩模量等, 利用分层总和法或规范所推荐的方法计算理论沉降值  $S_j$ , 现场试验实际所测的沉降值为  $S_c$ 。由于土的空间变异性, 不同试验点所测得的值可能不同, 是个随机变量。 $S_j$  与  $S_c$  可能存在偏差, 这归因于试验方法的不确定性和土参数的变异性。计算值与实测值之间的偏差是随机的, 它们之间的关系可以表示为

$$S_j = \varphi S_c \quad (6)$$

式中:  $\varphi$  表示地基沉降计算值与实测值间的关系, 也可称为沉降修正系数, 可通过大量的室内试验和现场实测资料统计得到。目前认为, 现场载荷试验是工程中比较可靠的数据来源。设由现场载荷试验方法获得了  $n$  个测定值  $S_{ci} (i=1, \dots, n)$ ; 同时, 这  $n$  个测定值对应于  $n$  个理论计算值  $S_{ji} (i=1, \dots, n)$ , 则可以获得随机因子  $\varphi$  的  $n$  个值:

$$\varphi_i = \frac{S_{ji}}{S_{ci}} \quad (i=1, \dots, n) \quad (7)$$

因为土材料的特殊性, 即使是同一区域、同一地层、同一土样的沉降修正系数也不一定是个确定值。实际上, 受各种客观和主观因素的影响, 土性参数总是波动的。因此, 一个比较合理的做法, 就是用一概率分布来表示某一特定土性和区域的沉降修正系数估计值。根据前人的研究<sup>[11]</sup>, 沉降修正系数  $\varphi$  虽然不确定, 但却是在某一区间内变化, 用  $\theta$  表示, 假设参数  $\theta$  在某一区间内均匀分布。

### 3.2 贝叶斯推断

(1) 将  $\theta$  看成是某区间上的随机变量, 于是当  $\theta$  已知时, 样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的联合分布密度  $p(x_1, \dots, x_n; \theta)$  就被看成是  $x_1, x_2, \dots, x_n$  对  $\theta$  的条件密度, 记为  $p(x_1, \dots, x_n|\theta)$ , 简为  $p(x|\theta)$ 。

(2) 设法确定先验分布  $\pi(\theta)$ ，对于先验分布的获取，目前有无信息先验分布 (Non-informative Priors) 和经验先验分布 (Informative Priors) 两种。前者是在实际工作中，对参数  $\theta$  没有任何过去的知识可以借鉴，而是希望通过试验结果来获得。根据前人对沉降修正系数的研究，只知道黏性土的参数  $\theta$  通常的取值范围为  $[a, b]$ ，没有任何以往的知识帮助我们确定先验分布  $\pi(\theta)$ 。文中按无经验先验分布 (Non-informative Priors)，假定参数  $\theta$  在其变化范围内，取到各个值的机会是相同的，采用均匀分布作为  $\pi(\theta)$ 。

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < \theta < b \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (8)$$

式 (8) 记为  $\theta \sim U(a, b)$ 。

(3) 利用条件分布密度  $p(x_1, \dots, x_n | \theta)$  和先验分布  $\pi(\theta)$ ，可以求出  $x_1, x_2, \dots, x_n$  与  $\theta$  的联合分布和样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的分布，于是就可利用它们求得  $\theta$  对  $x_1, x_2, \dots, x_n$  的条件分布密度，也就是用 Bayes 公式求得了后验分布密度  $f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$ 。

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta)p(x_1, \dots, x_n | \theta)}{\int \pi(\theta)p(x_1, \dots, x_n | \theta)d\theta} \quad (9)$$

当样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  确定后， $p(x_1, \dots, x_n | \theta)$  中的  $x_1, x_2, \dots, x_n$  是常数，只有  $\theta$  在变化，可以将其看成参数  $\theta$  的函数，称为似然函数，用  $l(\theta | x_1, \dots, x_n)$  来表示，于是后验分布密度也可写为

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \propto \pi(\theta)l(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (10)$$

根据现场实测数据，经数据统计分析后得沉降修正系数的条件概率服从某种分布  $\psi(\theta)$ ，即

$$p(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim \psi(\theta) \quad (11)$$

由式 (11) 可得  $\theta$  似然函数  $l(\theta | x_1, \dots, x_n)$  为

$$l(\theta | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \psi(\theta_i) \quad (12)$$

式中： $n$  为观测数据的个数。

综合上述推导，后验分布  $f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$  也可写成：

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) \propto U(a, b) \prod_{i=1}^n \psi(\theta_i) \quad (13)$$

(4) 利用后验分布密度  $f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n)$  作出对  $\theta$  的推断。

## 4 工程实例

某客运专线通过南方广泛分布的红黏土地区，

针对上硬下软的高液限、大孔隙比、低压缩性的红黏土地基，必须有效地利用上部的硬层，以达到节省资金和工程施工时间的双赢目的。

在红黏土地段 1<sup>#</sup>、2<sup>#</sup>、3<sup>#</sup>、4<sup>#</sup> 共 4 个工点，分别进行载荷试验，采用边长为 1 m 的方形承载板，进行常规载荷试验。同时，在载荷试验点周围的影响深度范围内取原状土样进行室内试验，其物理力学指标如表 1。由表可看出，红黏土具有高液限、大孔隙比、低压缩性的特性。由现场载荷试验得实测沉降量，并与理论计算沉降量对比如表 2 所示。从表中可看出，由于红黏土的低压缩性，实测沉降量与计算沉降量均显示该地基为小应变变形，且当路基面荷载应力增大时，实测沉降量与理论沉降量相距越远，这是由于荷载的应力较小时，假设土体为线性弹性体，路基土体沉降变形处于弹性状态，荷载与沉降量关系，基本符合直线关系。当荷载应力较大时，土体应假设为刚性塑性体，但目前理论中仍视为半无限空间弹性体<sup>[12-13]</sup>，于是出现荷载增大到一定值后，计算沉降量值远大于实测沉降量。

表 1 红黏土的物理力学指标

Table 1 Physico-mechanical indexes of red clay

| 工点             | 天然含水率<br>/% | 天然密度<br>/(g/cm <sup>3</sup> ) | 孔隙比   | 液限<br>/% | 压缩系数<br>/MPa <sup>-1</sup> | 压缩模量<br>/MPa |
|----------------|-------------|-------------------------------|-------|----------|----------------------------|--------------|
| 1 <sup>#</sup> | 28.0        | 1.83                          | 0.947 | 50.4     | 0.12                       | 14.45        |
| 2 <sup>#</sup> | 36.2        | 1.80                          | 1.075 | 47.0     | 0.17                       | 11.82        |
| 3 <sup>#</sup> | 24.9        | 1.95                          | 0.751 | 48.8     | 0.21                       | 8.18         |
| 4 <sup>#</sup> | 25.5        | 1.93                          | 0.761 | 43.5     | 0.09                       | 19.40        |

表 2 现场实测与理论计算沉降量 (单位: mm)

Table 2 The settlements of field observation and theoretical calculation (unit: mm)

| 工点             | 沉降量 | 地基面荷载应力 /kPa |      |      |       |       |       |
|----------------|-----|--------------|------|------|-------|-------|-------|
|                |     | 40           | 80   | 120  | 160   | 200   | 240   |
| 1 <sup>#</sup> | 计算值 | 4.03         | 4.66 | 7.34 | 10.03 | 12.71 | 14.40 |
|                | 实测值 | 4.69         | 5.14 | 5.58 | 6.03  | 6.48  | 7.43  |
| 2 <sup>#</sup> | 计算值 | 1.55         | 3.53 | 5.56 | 7.59  | 9.63  | 11.57 |
|                | 实测值 | 1.78         | 2.56 | 3.34 | 4.13  | 4.91  | 6.70  |
| 3 <sup>#</sup> | 计算值 | 2.84         | 3.14 | 5.11 | 6.97  | 8.84  | 10.67 |
|                | 实测值 | 3.02         | 3.44 | 3.86 | 4.29  | 4.71  | 5.34  |
| 4 <sup>#</sup> | 计算值 | 1.05         | 3.01 | 5.87 | 8.01  | 10.16 | 12.50 |
|                | 实测值 | 1.48         | 2.68 | 4.60 | 7.59  | 7.59  | 10.54 |

### 4.1 先验分布

根据文献[14-15]，关于沉降修正系数的取值范围一般为 0.2~1.4，估计其先验分布为

$$\pi(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{1.2}, & 0.2 < \theta < 1.4 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

## 4.2 后验分布

对比分析 1<sup>#</sup>、2<sup>#</sup>、3<sup>#</sup>、4<sup>#</sup>工点现场与室内试验, 得到修正系数  $\varphi$  的样本 24 个, 经统计分析得其直方图如图 1 所示。由图可知, 修正系数的概率密度大致服从  $N(\mu, \sigma^2)$  的正态分布, 即当样本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  确定后, 条件分布概率服从正态分布, 即

$$p(x_1, \dots, x_n | \theta) \sim N(\bar{\theta}_j, \sigma_j^2) \quad (15)$$

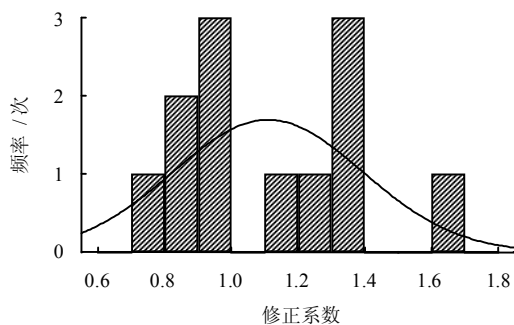


图 1 修正系数的直方图

Fig.1 The histograms of modified coefficients for settlement

由式 (9)、(14)、(15) 可得, 沉降修正后验概率为

$$f(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\frac{1}{1.2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}}{\int \frac{1}{1.2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_j} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} d\theta} \quad (16)$$

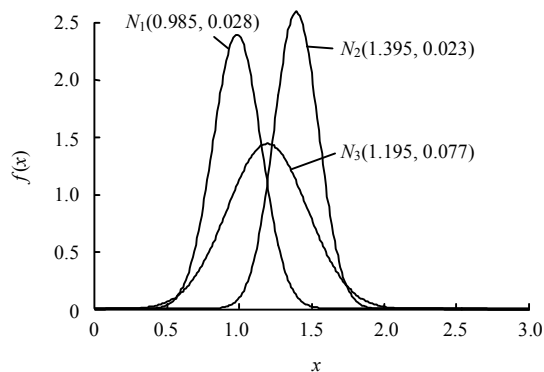
由式 (16) 可知道, 当先验概率假设为均匀分布, 样本概率为正态分布时, 由 Bayes 统计理论得其后验概率也服从正态分布。根据 4 个工点的现场载荷试验和室内土工试验, 根据样本统计数据得到不同荷载量的 6 组样本计算所得沉降修正系数可以看成 Bayes 统计的样本信息  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , 如表 3 所示。

表 3 不同荷载量下沉降修正系数

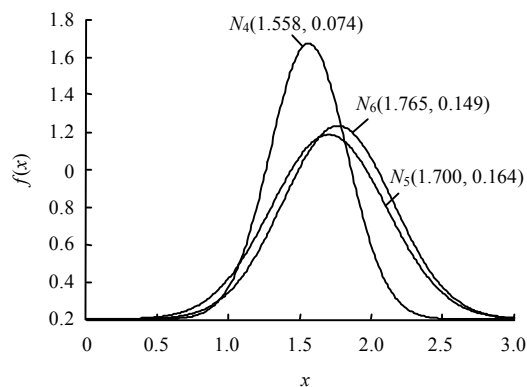
Table 3 Modified coefficients for settlement with different loads

| 工点             | 地基面荷载应力 / kPa |      |      |      |      |      |
|----------------|---------------|------|------|------|------|------|
|                | 40            | 80   | 120  | 160  | 200  | 240  |
| 1 <sup>#</sup> | 0.86          | 0.91 | 1.32 | 1.66 | 1.96 | 1.94 |
| 2 <sup>#</sup> | 0.87          | 1.38 | 1.66 | 1.84 | 1.96 | 1.73 |
| 3 <sup>#</sup> | 0.94          | 0.91 | 1.32 | 1.62 | 1.88 | 2.00 |
| 4 <sup>#</sup> | 0.71          | 1.12 | 1.28 | 1.33 | 1.34 | 1.19 |

沉降修正系数的先验分布含义是  $\varphi$  在区间上的取值机会均相等, 而通过 Bayes 理论对小子样进行分析, 得该区域红黏土的沉降修正系数的概率分布可用正态分布拟合, 其不同荷载量作用下的概率分布密度如图 2 所示。图 2(a) 表示当荷载应力为 40、80、120 kPa 时的后验分布, 分别用  $N_1$ 、 $N_2$ 、 $N_3$  表示; 图 2(b) 表示当荷载应力为 160、200、240 kPa 时的后验分布, 分别用  $N_4$ 、 $N_5$ 、 $N_6$  表示。



(a)



(b)

图 2 修正系数的后验分布

Fig.2 Posterior distributions of modified coefficients

从图 2 中可看出, 修正系数的后验分布因地基面荷载量的不同而有些变化, 但仍集中出现在 [1.0, 1.7] 之间。由于土体的复杂性、各向异性及区域性, 此区间稍微超出根据以往经验估计的先验分布的区间, 但针对于某一区域性的红黏土来说, 并不是矛盾的。

## 5 结 论

(1) 在现场原位测试数据非常有限的条件下, 利用小样本 Bayes 分析, 求得了现场原位试验与室内土工试验对比的沉降修正系数的概率分布, 用

此分布来估计沉降修正系数。实例证明后验分布的沉降修正系数的选取,将传统方法的取值范围[0.2, 1.4]缩小了,降低了沉降计算的不确定性。

(2) Bayes 理论的应用主要在于先验分布的获取和后验分布的统计推断。基于以往经验假设沉降修正系数的先验分布为均匀分布,最大程度地利用了以往的经验信息,充分地反映了其客观性。

(3) Bayes 的后验分布是集中了总体、样本和先验等3种信息中有关 $\theta$ 的一切信息。最大限度地利用有限的样本信息,进而推求沉降修正系数的后验分布服从正态分布,并对其进行了参数估计,将沉降修正系数的取值从较大的区间优化成较小的范围,这包含了比传统方法更多的经验和信息,为类似工程的沉降计算提供了一条新的途径。

### 参考文献

- [1] 李小勇, 谢康和, 白晓红. 土性指标概率分布模型的研究[J]. 岩土工程技术, 1999, (4): 23—26.  
LI Xiao-yong, XIE Kang-he, BAI Xiao-hong. Study on probabilistic distribution model of soil properties indices[J]. *Geotechnical Engineering Technique*, 1999, (4): 23—26.
- [2] 卫军, 罗扣. 基于贝叶斯方法的时变可靠度分析[J]. 华中科技大学学报, 2007, 35(2): 1—4.  
WEI Jun, LUO Kou. Analysis of time dependent reliability by using Bayesian approach[J]. *Journal of Huazhong University of Science and Technology*, 2007, 35(2): 1—4.
- [3] 李小勇, 谢康和. 土性参数相关距离的计算研究和统计分析[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 350—353.  
LI Xiao-yong, XIE Kang-he. Numerical studies and statistic analyses of correlation distances of soil character parameters[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2000, 21(4): 350—353.
- [4] 宁宝宽, 王维纲. 浅基础可靠性设计中的贝叶斯统计方法及应用[J]. 沈阳工业大学学报, 2005, 27(1): 103—107.  
NING Bao-kuan, WANG Wei-gang. Bayes statistical method and its application to reliability design of shallow foundation[J]. *Journal of Shenyang University of Technology*, 2005, 27(1): 103—107.
- [5] 孙旋, 巫世晶, 王晓笋. 小样本系统可靠性评估模型的可信度验证[J]. 武汉大学学报(工学版), 2006, 39(2): 88—92.
- [6] 陈斌, 刘宁, 卓家寿. 岩土工程反分析的扩展贝叶斯法[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(4): 555—560.  
CHEN Bin, LIU Ning, ZHUO Jia-shou. Extended Bayesian method of inverse analysis in geoenvironment[J]. *Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering*, 2004, 23(4): 555—560.
- [7] 中华人民共和国建设部. GB50007—2002 建筑地基基础设计规范[S]. 北京: 中国建筑工业出版社, 2002.
- [8] 张尧庭, 陈汉峰. 贝叶斯统计推断[M]. 北京: 中国科学出版社, 1991: 18—24.
- [9] BERGER J. Statistical decision theory and bayesian analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [10] 张仪萍. 地基沉降泊松曲线拟合的概率方法[J]. 岩土工程学报, 2005, 27(7): 837—841.  
ZHANG Yi-ping. Probability method for foundation settlement simulated with Poisson curve[J]. *Chinese Journal of Geotechnical Engineering*, 2005, 27(7): 837—841.
- [11] 茆诗松. 贝叶斯统计[M]. 北京: 中国统计出版社, 1999.
- [12] 宰金珉, 梅国雄. 全过程的沉降量预测方法研究[J]. 岩土力学, 2000, 21(4): 322—325.  
ZAI Jin-min, MEI Guo-xiong. Forecast method of settlement during the complete process of construction and operation[J]. *Rock and Soil Mechanics*, 2000, 21(4): 322—325.
- [13] 陈希哲. 土力学地基基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 1997.
- [14] 宁宝宽, 杨军. 沈阳粉质黏土工程指标的概率统计及分布模型[J]. 沈阳工业大学学报, 2006, 26(4): 461—465.  
NING Bao-kuan, YANG Jun. Probabilistic distribution model for silt clay in Shenyang[J]. *Journal of Shenyang University of Technology*, 2006, 26(4): 461—465.
- [15] 赵明华, 杨明辉, 刘煜, 等. 软土路基固结沉降机理及其预测方法研究[J]. 铁道科学与工程学报, 2005, 2(4): 16—21.  
ZHAO Ming-hua, YANG Ming-hui, LIU Yu, et al. study on the developing and forecasting of the settlement in soft clay roadbed[J]. *Journal of Railway Science and Engineering*, 2005, 2(4): 16—21.